

Erwartungshorizont zu Fragestellungen und Lösungen zu Übungsaufgaben

1.

a) Unterschiedliche Lebenszyklen von Sternen:

α) Von einem kleinen stellaren Nebel zum weißen Zwerg:

- Aus einer kollabierenden, stellaren Wolke bildet sich ein *Protostern* – dieser verwandelt sich in einen *Stern wie etwa unsere Sonne*. In dieser – bei weitem längsten Phase eines Sternenlebens – wandelt der Stern seine Wasserstoffreserven in Helium um.
- Erlischt das Fusionieren von Protonen zu Helium mangels Nachschub, wandelt sich der Stern in einen *Roten Riesen* – die Gravitation nimmt so lange stark zu, bis Dichte, Druck und Temperatur ausreichen, um Heliumkerne zu Kohlenstoff zu fusionieren.
- Wenn die Kernfusionen aufhören, stösst der Rote Riese seine äußeren Hüllen in den ihn umgebenden Weltraum ab – er wird zu einem *planetarischen Nebel*.
- Durch allmähliche Abkühlung des planetarischen Nebels entsteht ein *weißer Zwerg*.

β) Von einem großen stellaren Nebel zur Supernova:

- Aus einer viel größeren kollabierenden, stellaren Wolke entsteht über die Bildung eines *Protosterns* ein *Stern, der bis zur 10-fachen Sonnenmasse und teilweise mehr anwachsen kann*. Dieser Stern ist äußerst gashaltig mit einer extrem hohen inneren Temperatur und wird auch als *Blauer Riese* bezeichnet.
- Der Blaue Riese bläht seine Größe weiter auf – mit Zunahme der Größe kühlen seine äußersten Schichten ab, was zu einer Rotverfärbung führt. Der Stern wird zum *Roten Überriesen*.
- In der nächsten Phase zerfällt der Kern des Roten Riesen – es kommt zu heftigen Explosionen, wodurch die äußeren Schichten in den Weltraum hinausgeschleudert werden. Dieses Ereignis wird als *Supernova* bezeichnet. Nach der Explosion verwandelt sich der restliche Stern in einen *Neutronenstern* oder auch in ein *Schwarzes Loch*.

b) Sterne mit einer Masse von rund 10 Sonnenmassen enden meist als Neutronensterne, die eine extreme Dichte von bis zu 100 t/cm³ erreichen können bei einem Durchmesser von 10–20 km. Dabei verschmelzen Protonen und Elektronen zu ungeladenen Neutronen. Wenn der Überriesen eine Masse von über 30 Sonnenmassen aufweist, steigt die Wahrscheinlichkeit, dass nach der Supernova-Explosion ein *Schwarzes Loch* entsteht. Der Grund liegt darin, dass mit dem Abwurf der äußersten Schichten die Zunahme der

Gravitation deutlich stärker wird als der Temperaturdruck – der Stern implodiert und endet als Schwarzes Loch.

2. a)

- Einsteins ART kann als eine Erweiterung des Gravitationsgesetzes von Isaac *Newton* betrachtet werden. Während Newton in seinem Gesetz noch davon ausging, dass Raum und Zeit für das gesamte Universum als statische Größe zu betrachten seien, konnte Einstein bereits mit seiner SRT zeigen, dass dies nicht der Fall war – vielmehr erkannte er, dass Raum und Zeit mit der Gravitation wechselwirken.

Einstein fasste den Raum und die Zeit zu einer gemeinsamen, vierdimensionalen *Raumzeit* zusammen und konnte daraus als Konsequenz zeigen, dass sich die Raumzeit unter dem Einfluss von Massen krümmt und dies sich sogar auf die Bahnen von Lichtstrahlen auswirkt.

- Der *Ereignishorizont* wird in der ART als eine *Grenzfläche innerhalb der Raumzeit* beschrieben – diese besagt, dass Ereignisse und Informationen jenseits dieser Grenzfläche nicht sichtbar sind für Beobachter, die sich diesseits dieser Grenzfläche befinden. Die entscheidende Rolle spielt dabei das Licht, weil es ebenso wie jegliche andere Materie vom Schwarzen Loch verschluckt wird. Somit würde die zum Verlassen des Schwarzen Loches nötige „Fluchtgeschwindigkeit“ größer als die Lichtgeschwindigkeit, was aber aufgrund der Definition der Lichtgeschwindigkeit als Grenzgeschwindigkeit nicht möglich ist.
- Der deutsche Astronom **Karl Schwarzschild** (1873–1916) hat wenige Monate vor seinem Tod aus der gerade veröffentlichten ART die Krümmung und Raumzeit in der Umgebung eines nicht rotierenden Sterns abgeleitet. Wenig später berechnete er aus den komplizierten *Feldgleichungen Einsteins* die Raumzeitkrümmung innerhalb eines Sterns.

Mit seinen Ableitungen konnte er zeigen, dass es für *jede kugelförmige* Masse einen *kritischen Radius* gibt, für den – sobald er unterschritten wird – keine Kraft mehr in der Natur existiert, die der Gravitation etwas entgegensetzen könnte. Ihm zu Ehren wird dieser Radius **Schwarzschild-Radius** genannt – wird er erreicht, kollabiert jede Masse zum Schwarzen Loch. Der Schwarzschild-Radius der Sonne beträgt beispielsweise 2,95 km und der der Erde weniger als 1 cm. Bei statischen Schwarzen Löchern ist der Ereignishorizont somit eine Kugeloberfläche, deren Radius Schwarzschild-Radius genannt wird.

- Was sich nach dem Passieren des Ereignishorizontes im Inneren des Schwarzen Loches abspielt, kann bis heute nicht genau erklärt werden, weil es noch niemandem ein experimenteller Nachweis gelungen ist.

Anhand der ART kann man aber sehr genau definieren, dass im Zentrum eines Schwarzen Loches eine **Punktmasse** sitzen muss – dies ist ein Ergebnis, wenn man die Krümmung der Raumzeit eines Schwarzen Loches genau mathematisch analysiert.

In diesem Massezentrum herrscht die stärkste Raumkrümmung im Schwarzen Loch, die man nicht mehr mit einer endlichen Zahl ausdrücken kann – vielmehr liegt bei einem Radius null eine unendliche Krümmung vor. Dort liegt die Quelle der Gravitation eines Schwarzen Loches, die als **Singularität** oder **Krümmungssingularität** bezeichnet wird.

Ausgehend von der experimentellen Erfahrung der Physiker müsste in dieser unendlich kleinen Umgebung die **Quantentheorie** eine entscheidende Rolle spielen, weil die ART ihrer Formulierung nach eine klassische Theorie ist, in der Quanteneffekte keine Rolle spielen. Um folglich die Umgebung der Singularität angemessen beschreiben zu können, wäre eine Theorie nötig, welche die ART und Quantentheorie in irgendeiner Form zusammenführen kann – man bezeichnet sie als **Quantengravitation**. Wie eine Theorie der Quantengravitation aussehen soll, gehört allerdings bis heute zu den nicht gelösten Fragen der Physik.

- b) Der Einfang von Materie und Licht nimmt folgenden Verlauf:
- Materie und Licht werden durch die Gravitation in der Nähe des Schwarzen Lochs zunächst abgelenkt, bevor sie bei (A) auf eine Umlaufbahn um das Schwarze Loch gezwungen werden.
 - Die Gravitationswirkung auf Materie und Licht nimmt zu, sodass der Radius über (B) hin zu (C) immer kleiner wird.
 - Bei (D) wird der Ereignishorizont mit dem Schwarzschild-Radius erreicht. Der Einflussbereich des Schwarzen Loches wird nun so groß, dass die strahlende Materie und die Photonen des Lichts beim Überschreiten dieser Grenzlinie unwiederbringlich im Schwarzen Loch verschwinden.

3. a)

Will man eine Masse m im Gravitationsfeld eines kugelförmigen Körpers (Masse M , Radius R) ins Unendliche befördern, so gilt für die potentielle Energie der Masse m im Abstand R von der Masse M :

$$E_{\text{pot}}(R) = -\frac{G \cdot m \cdot M}{R} \quad (1)$$

Für die Kinetische Energie der Masse m gilt beim Start auf der Oberfläche der Masse M :

$$E_{\text{kin}}(R) = \frac{m \cdot v_{\text{FI}}^2}{2} \quad (2)$$

Die kinetische Energie hat sich im Unendlichen vollständig in potentielle Energie umgewandelt. Daher gilt:

$$-\frac{G \cdot m \cdot M}{R} + \frac{m \cdot v_{\text{FI}}^2}{2} = 0 \Rightarrow \frac{m \cdot v_{\text{FI}}^2}{2} = \frac{G \cdot m \cdot M}{R} \Rightarrow v_{\text{FI}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}} \quad (3)$$

b) Zunächst wird Gl. (3) nach R aufgelöst:
$$R = \frac{2 \cdot G \cdot M}{v_{Fl}^2} \quad (4)$$

Die Fluchtgeschwindigkeit v_{Fl} muss nun ihren größtmöglichen Wert annehmen – dies ist die Lichtgeschwindigkeit c . Eingesetzt in Gleichung (4) ergibt sich damit die Formel für den Schwarzschild-Radius R_S :

$$R_S = \frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2} \quad (5)$$

c) Mit Gleichung (5) erhält man für den Schwarzschild-Radius der Sonne:

$$R_{S(\text{Sonne})} = \frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2} = \frac{2 \cdot 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{(2,998^2 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2} = 2.953,85 \text{ m}$$

Die entsprechende Berechnung mit der Erdmasse liefert folgende Ergebnis:

$$R_{S(\text{Erde})} = 8,87 \cdot 10^{-3} \text{ m} \approx 0,89 \text{ cm}$$

4.

a) Es gelten $F_Z = \frac{m \cdot v_{B,E}^2}{a}$ und $F_{Gr.} = \frac{G \cdot m \cdot M}{a^2}$
 Mit $F_Z = F_{Gr.}$ und $v_{B,E} = \frac{2 \pi \cdot a}{T}$ folgt daraus:

$$\frac{m \cdot v_{B,E}^2}{a} = \frac{G \cdot m \cdot M}{a^2} \Rightarrow \frac{4 \pi^2 \cdot a^2}{a \cdot T^2} = \frac{G \cdot M}{a^2} \Rightarrow \frac{a^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4 \pi^2}$$

b)
$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4 \pi^2} \Rightarrow M = \frac{4 \pi^2 \cdot a^3}{G \cdot T^2}$$

$$M = \frac{4 \pi^2 \cdot (1,526 \cdot 10^{14} \text{ m})^3}{6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot (16,05 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s})^2} = 8,205 \cdot 10^{36} \text{ kg}$$

c) Mit $M_{S_0} = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ erhält man:
$$M_{SrgA*} = \frac{8,205 \cdot 10^{36} \text{ kg}}{1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}} \approx 4,125 \cdot 10^6 \cdot m_{S_0}$$

d) Für den Schwarzschild-Radius von SgrA* gilt:

$$R_{S,SrgA^*} = \frac{2 \cdot 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 8,205 \cdot 10^{36} \text{kg}}{(2,998^2 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2} \approx 1,218 \cdot 10^{10} \text{ m}$$

Daraus folgt für den Durchmesser von SgrA*:

$$d_{S,SrgA^*} = 2 \cdot 1,218 \cdot 10^{10} \text{ m} \approx 2,437 \cdot 10^{10} \text{ m}$$

Mit $d_{S_0} \approx 13,926 \cdot 10^8 \text{ m}$ entspricht die Ausdehnung von SgrA* etwa dem 17,5-fachen Sonnendurchmesser!

5.

- a) Eine LIGO-Anlage besteht aus einer Laserquelle **(1)**, die ihr Licht zunächst auf einen Strahlteiler **(2)** lenkt. Dieser trennt den Lichtstrahl in zwei Anteile, die sich dann getrennt voneinander auf den Weg machen in zwei rechtwinklig angeordnete Tunnel von jeweils vier Kilometern Länge.
Dort treffen die Laserstrahlen jeweils auf zwei Spiegel **(3)**, zwischen denen sie hin- und hergeschickt werden, bevor sie über den Strahlteiler wieder zusammengeführt werden. Danach treffen sie auf einen Lichtdetektor **(4)**, wo die entsprechenden Messungen durchgeführt werden.
- b) Im sogenannten Normalbetrieb – also ohne den Einfluss durch Gravitationswellen – legen die Laserstrahlen identisch lange Wegstrecken zurück. Dies hat zur Folge, dass sie sich gegenseitig auslöschen – den Detektor erreicht somit kein messbares Signal.
Sind Gravitationswellen vorhanden, so verformen diese die Tunnel minimal und damit automatisch die Distanz, welche die Laserstrahlen zurücklegen. Die Lichtwellen werden in der Folge dadurch gegeneinander verschoben und produzieren durch diese Ungleichheit ein messbares Signal für den so bezeichneten **Laserinterferometer**.