Arbeitsblatt 2:

a) Die Frequenz der Gravitationswellen

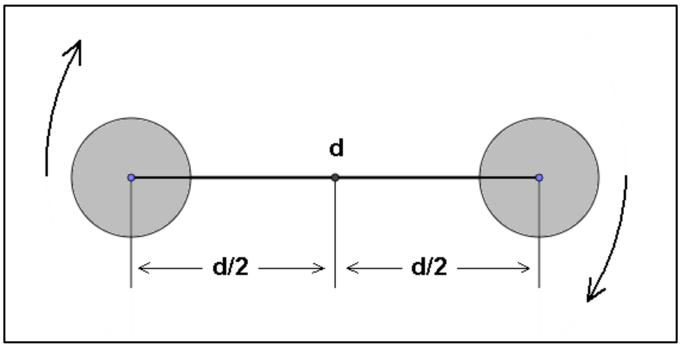
Bestimmte Bahnparameter der beiden Schwarzen Löcher sind eng mit der Frequenz der empfangenen Gravitationswellen verknüpft. Diese Frequenz ist genau doppelt so groß wie die Umlauffrequenz der beiden massiven Himmelskörper. Diese wichtige Beziehung $f_{GW} = 2 \cdot f_{Orb}$ können Sie mithilfe einer kleinen Computersimulation leicht nachvollziehen. Starten Sie das Programm *Gravitationswellen.exe*[1] und vergleichen Sie die Bewegung der beiden Massen mit den entstehenden Wellenbewegungen. Nach jeder halben Umlaufperiode wird ein Wellenberg ausgelöst.

Bemerkung: Ihnen sollte bewusst sein, dass die Darstellung der Raumkrümmung und die Ausbreitung von Gravitationswellen mithilfe eines zweidimensionalen Netzes nur eine Hilfestellung sein können, um die physikalischen Zusammenhängen etwas begreifbarer zu machen. In Wirklichkeit handelt es sich ja um Kugelwellen, die nicht nur den dreidimensionalen Raum verändern, sondern auch die Zeit. Das Konzept der Raumzeit, das aus der Allgemeinen Relativitätstheorie stammt, lässt sich in Gänze wohl kaum in einfacher Form anschaulich darstellen.

b) Der Abstand der Schwarzen Löcher

Die beiden sich umkreisenden Schwarzen Löcher hatten vor Ihrer Verschmelzung Massen, die dem 29-fachen und 36-fachen der Sonnenmasse ($M_{Sonne} = 2 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$) entsprachen. Um die nachfolgenden Herleitungen einfach zu halten, gehen wir von zwei gleich großen Massen mit einer Gesamtmasse von 65 Sonnenmassen aus. Es soll also gelten: $M_{ges} = 65 \cdot M_{Sonne}$.

Außerdem ist zu beachten, dass sich die beiden Massen um den gemeinsamen Schwerpunkt bewegen, der sich genau in der Mitte der gleich großen Massen befindet. Der Radius der Umlaufbahn einer Masse ist daher $d/2$, aber der Abstand, der in das Gravitationsgesetz eingeht, beträgt d.



Bildquelle: M. Borchardt

[1] http://www.mabo-physik.de/gravitationswellen.html

1. Leiten Sie die folgende Formel für den Abstand der beiden Massen her

   $$d = \left(\frac{G \cdot M_{ges}}{\pi^2 \cdot f_{GW}^2} \right)^{\frac{1}{3}} .$$

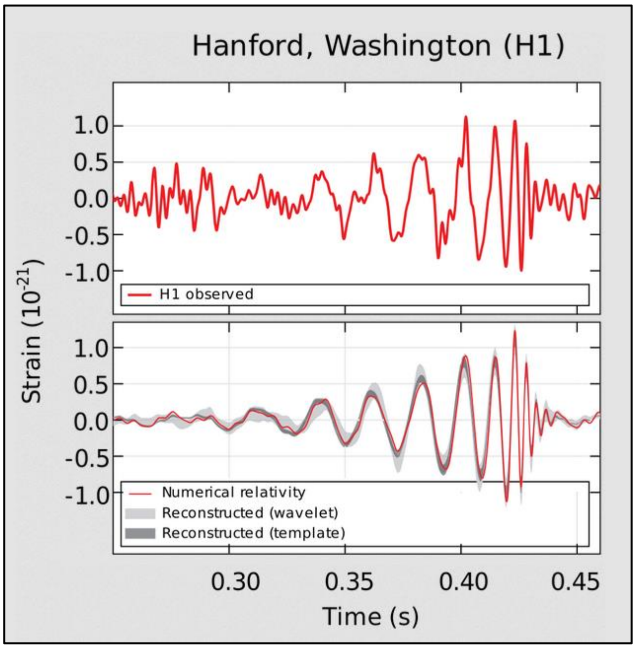
   Verwenden Sie dazu:

   - das Gravitationsgesetz $F_G = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2}$ mit $m_1 = m_2 = \frac{M_{ges}}{2}$ und $r = d$,
   - die Zentripetalkraft $F_{ZP} = \frac{m \cdot v^2}{r}$ mit $m = \frac{M_{ges}}{2}$ und $r = \frac{d}{2}$,
   - die Bahngeschwindigkeit um den gemeinsamen Schwerpunkt $v = 2\pi \cdot r \cdot f_{Orb}$ mit $r = \frac{d}{2}$ und $f_{Orb} = \frac{f_{GW}}{2}$.

   Tipp:
   Verwenden Sie den Ansatz: Die Gravitationskraft wirkt als kreisbildende Kraft, also als Zentripetalkraft $F_{ZP} = F_G$ und ersetzen Sie an geeigneter Stelle der Herleitung die Geschwindigkeit v durch $v = 2\pi \cdot r \cdot f_{Orb}$.

2. Die nebenstehenden Diagramme zeigen die Aufzeichnung der Gravitationswelle durch das Interferometer in Hanford und die theoretischen Berechnungen – basierend auf dem Formalismus der Allgemeinen Relativitätstheorie.

   Berechnen Sie den ungefähren Abstand der beiden Massen zwischen den Zeitpunkten 0,35 und 0,4 Sekunden. Schätzen Sie dazu die Frequenz der Gravitationswelle in diesem Zeitintervall ab und berechnen Sie mit der Formel aus b) 1. den Abstand d in km.



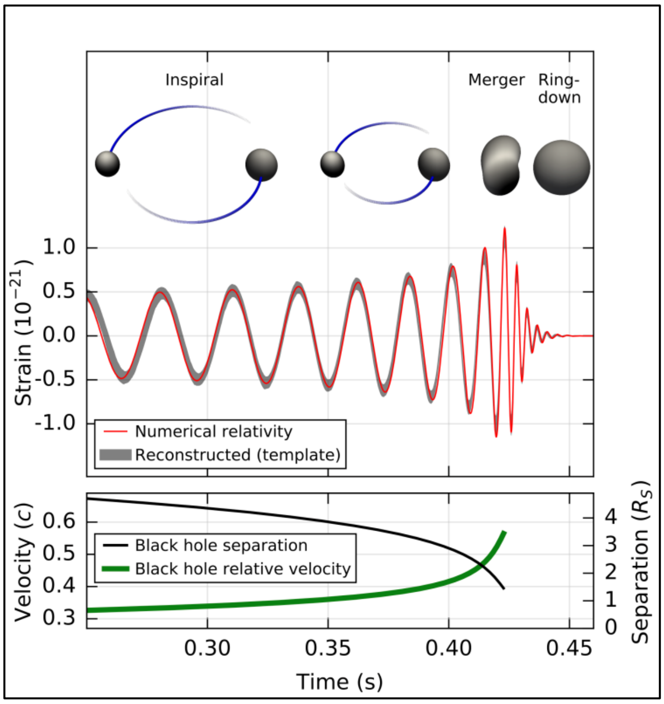
Bildquelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:LIGO_measurement_of_gravitational_waves.svg

3. Üblicherweise wird der Abstand in Einheiten des Schwarzschildradius R_S angegeben. Dieser berechnet sich durch $R_S = \frac{2 \cdot G \cdot M_{ges}}{c^2}$.

   Berechnen Sie diesen Schwarzschildradius in km und geben Sie den Abstand d der beiden Schwarzen Löcher in Einheiten von R_S an.

4. Im rechten Diagramm unten ist der Abstand („Separation“) der beiden Schwarzen Löcher als Kurve dargestellt. Diese wurde mithilfe der Allgemeinen Relativitätstheorie aus der Frequenz der Gravitationswelle berechnet.

   Prüfen Sie, ob in dem betrachteten Zeitintervall Ihre Berechnung in etwa mit der Kurve übereinstimmt.



Bildquelle: B. P. Abbott et al. (2016). „Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger“. In: *Physical Review Letters* 116:06. https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.116.061102

c) Die Bahngeschwindigkeit der Schwarzen Löcher

Um die Bahngeschwindigkeit der beiden Massen um den gemeinsamen Schwerpunkt zu berechnen, können Sie den oben berechneten Abstand d (in Metern) in die folgende Formel einsetzen:

$$v_{Orb} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M_{ges}}{d}}$$

Leiten Sie zunächst diese Formel her, berechnen Sie dann die Bahngeschwindigkeit und geben Sie das Ergebnis in Prozent der Lichtgeschwindigkeit an.

<u>Anmerkung:</u>
Wenn Sie Ihr Ergebnis mit der Geschwindigkeitskurve aus der oberen Abbildung vergleichen, werden Sie bemerken, dass Ihr Wert deutlich zu klein ist. In der Tat ist der richtige Wert für die Geschwindigkeit genau doppelt so groß, wie der, den Sie aus der oberen Formel für v_{Orb} berechnet haben.

Hier zeigt sich eindrücklich, dass die klassische Physik, also das Gravitationsgesetz von Newton, versagt und die Allgemeine Relativitätstheorie[2] herangezogen werden muss. Diese liefert für die extremen Gravitationsverhältnisse, wie sie bei der Verschmelzung zweier Schwarzer Löcher gegeben sind, einen zusätzlichen Faktor 2.

[2] Die Gravitationswellenforscher verwenden eher die sogenannte „Post-Newtonsche Näherung“ (PN), die für die numerische Umsetzung der Einstein'schen Feldgleichungen mit Supercomputern wesentlich besser geeignet ist.

